Cadre : On considère (X,d) un espace métrique et $(E,\|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités sur les espaces complets

1) Suites de Cauchy et complétude

Définition 1. On dit que (u_n) est de Cauchy lorsque :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ \forall p\in\mathbb{N},\ |u_{n+p}-u_n|<\varepsilon$$

Proposition 2. *(i) Toute suite convergente est de Cauchy.*

(ii) Toute suite de Cauchy est bornée.

(iii) Toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge.

Définition 3. On dit que (X,d) est complet si toute suite de Cauchy de X est convergente.

Exemple 4. $(\mathbb{R},|.|)$ *et* $(\mathbb{R}^n,\|.\|)$ *sont complets,* $(\mathbb{Q},|.|)$ *ne l'est pas.*

Exemple 5. $(\mathbb{R},d)$*, où* $d(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$ *n'est pas complet.*

Remarque 6. *Les notions de suites de Cauchy et d'espaces complets ne sont pas topologique mais métriques.*

2) Propriétés générales des espaces complets

Théorème 7. *Il existe un espace métrique complet* $(\widehat{X},\widehat{d})$*, appelé complété de* X*, et une isométrie* $i:(X,d)\to(\widehat{X},\widehat{d})$ *d'image dense.*

Exemple 8. $\widehat{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ *pour la distance usuelle.*

Proposition 9. *Si* (X,d) *est complet et* $A\subset X$*, alors* (A,d) *est complet si, et seulement si,* A *est fermé dans* X*.*

Théorème 10 (Fermés emboîtés)**.** *Si* (X,d) *est complet, alors, pour toute suite* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante de fermés non vides de* X *dont le diamètre tend vers 0,* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n$ *est un singleton.*

Proposition 11. *Un espace métrique est compact se, et seulement si, il est précompact et complet.*

II Exemples d'espaces complets

1) Espaces de Banach

Définition 12. On dit que $(E,\|.\|)$ est espace de Banach s'il est complet.

Théorème 13. $(E,\|.\|)$ *est un espace de Banach si, et seulement si, toute série absolument convergente de* E *est convergente.*

Proposition 14. *Si* F *est un Banach, alors* $\mathcal{L}(E,F)$ *est un Banach.*

Corollaire 15. E' *est un espace de Banach.*

Proposition 16. *L'espace* $\mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{R})$*, si on le munit de la norme* $\|f\|=\sum_{i=0}^k\left\|f^{(i)}\right\|_\infty$*, est un espace de Banach, contrairement à si on le munit de la norme* $\|.\|_\infty$*.*

2) Espaces L^p

Définition 17. Pour tout réel $p>0$, on définit le $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

$$\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu)=\left\{f:X\to\mathbb{K}\text{ mesurable}\,\middle|\,\|f\|_p<+\infty\right\}$$

Théorème 18 (Hölder)**.** *Soient* $f\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ *et* $g\in\mathscr{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$*, où* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*. Alors* $\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$*.*

Théorème 19 (Minkowski)**.** *Soient* $p\in[1,+\infty[$ *et* $f,g\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$*. Alors* $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$*.*

Définition 20. Pour $1\leqslant p<+\infty$, on définit $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ comme l'espace vectoriel normé quotient de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ par les fonctions presque nulles. On associera par abus de langage un élément de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ à sa classe dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Définition 21. On définit $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ comme l'espace vectoriel normé quotient de $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ par les fonctions presque nulles.

Remarque 22. *En considérant 1 et* ∞ *comme exposants conjugués, on retrouve les inégalités de Hölder et de Minkowski.*

Théorème 23 (Riesz-Fischer)**.** *Pour tout* $1\leqslant p\leqslant+\infty$*,* $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ *est un espace de Banach.*

3) Espaces de Hilbert

Définition 24. Un espace vectoriel est dit préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire. S'il est complet pour la norme issue du produit scalaire, on dit que c'est un espace de Hilbert (ou hilbertien).

Exemple 25. $(L^2, \|.\|_2)$ *est un espace de Hilbert.*

Proposition 26. *Un espace vectoriel normé E est un espace préhilbertien si, et seulement si, $\|.\|$ vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire :*

$$\forall\, x, y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Théorème 27. *Pour tout $f \in H$, il existe un unique élément de K, noté $P_K(f)$, et appelé projection de f sur K, tel que :*

$$\|P_K(f) - f\| = \inf_{v \in K} \|v - f\|$$

De plus, $P_K(f)$ est caractérisée par :

$$\forall v \in K,\ \langle f - P_K(f), v - P_K(f)\rangle \leqslant 0$$

Corollaire 28. *Soient M un sous-espace vectoriel fermé de H et $f \in H$. Alors $P_M(f)$ est caractérisé par :*

$$P_M(f) \in M \qquad \text{et} \qquad \forall\, v \in M,\ \langle f - P_M(f), v\rangle = 0$$

De plus, P_M est un opérateur linéaire.

Théorème 29 (Riesz-Fréchet)**.** *Soit $\varphi \in H'$. Alors il existe un unique $f \in H$ tel que :*

$$\forall\, v \in H,\ \langle \varphi, v\rangle = \langle f, v\rangle$$

Application 30. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un Hilbert H, alors $F \oplus F^{\perp} = H$*

Application 31. *Soit $u \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique $u^\star \in \mathcal{L}(H)$ tel que :*

$$\forall\, x, y \in H,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle \quad \text{avec} \quad \|u\| = \|u^\star\|$$

Proposition 32. *Un sous-espace vectoriel F de H est dense si, et seulement si, $F^{\perp} = \{0\}$.*

III Utilisations de la complétude

1) Prolongement de fonctions

Théorème 33. *Soient H un espace de Hilbert, F un sous-espace vectoriel de H, et $f \in F'$. Il existe $g \in H'$ qui prolonge f et telle que $\|g\| = \|f\|$.*

Remarque 34. *L'énoncé général dans un espace vectoriel normé s'appuie sur le lemme de Zorn. Dans un espace de Hilbert, on peut en fait construire explicitement un prolongement.*

Théorème 35. *Soient E et F des espaces métriques, et $A \subset E$ dense.*

(i) Si $f : A \to F$ est continue, et si, pour tout $x \in E \setminus A$, $\lim_{y \to x, y \in A} f(y)$ existe, alors il existe une unique fonction $g : E \to F$ continue telle que $g|_A = f$.

(ii) On suppose F complet. Si $f : A \to F$ est uniformément continue, il existe une unique fonction $g : E \to F$ uniformément continue telle que $g|_A = f$.

Théorème 36. *Soient E et F deux espaces métriques, D une partie dense de E. Si F est complet alors toute application uniformément continue de D dans F admet un unique prolongement continu sur E. Ce prolongement est de plus uniformément continu.*

Corollaire 37. *Soient E un espace vectoriel normé, D un sous-espace vectoriel dense de E et F un espace de Banach. Toute application linéaire continue de D dans F a un unique prolongement linéaire continu sur E.*

2) Théorème de point fixe

Théorème 38 (Banach-Picard)**.** *Soient (E, d) un espace métrique complet (non vide), et $F : E \to E$ une application k-contractante. Alors F admet un unique point fixe et toute suite définie par $u_0 \in E$ puis $u_{n+1} = F(u_n)$ converge vers ce point à une vitesse géométrique.*

Remarque 39. *Si F^p est contractante, on a le même résultat.*

Contre-exemple 40. *Si $E =]0, 1[$ et $F : x \mapsto \frac{x}{2}$, F est contractante mais sans point fixe (E n'est pas complet).*

Contre-exemple 41. *Si $E = [0, 1]$ et $F : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$, E est complet, F est contractante, mais sans point fixe ($F([0, 1]) = [1, \sqrt{2}]$).*

Contre-exemple 42. *Si $E = \mathbb{R}$ et $F : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$, E est complet, F applique E dans lui-même, mais sans point fixe (F n'est pas contractante).*

3) Théorème de Baire et applications

Théorème 43 (Baire)**.** *Soit E un espace métrique complet. Toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides de E est d'intérieur vide dans E.*

Corollaire 44. *Soit E un espace métrique complet. Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Application 45. *Un espace de Banach est de dimension finie ou non dénombrable. Par exemple $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.*

Théorème 46 (Banach-Steinhaus)**.** *Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs continus de E dans F. On suppose que, pour tout $x \in E$, $\sup_{i\in I} \|u_i(x)\| < +\infty$. Alors $\sup_{i\in I} \|u_i\| < +\infty$.*

Application 47. *Il existe des fonctions continues et 2π-périodique qui diffèrent de leur série de Fourier.*

Théorème 48 (Application ouverte)**.** *Une application linéaire continue surjective entre espaces de Banach est ouverte.*

Corollaire 49. *Une application linéaire continue bijective entre espaces de Banach est d'inverse continue*

Théorème 50 (Graphe fermé)**.** *Une application linéaire $T : E \to F$ entre deux espaces de Banach est continue si, et seulement si, son graphe $\{(x, T(x)) \mid x \in E\}$ est fermé pour la norme produit.*

Développements

- Théorème de Riesz-Fischer (23) [Bre87]
- Projection sur un convexe fermé et théorème de Riesz (27,28,29) [Bre87]

Références

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses

[Bre87] H. Brezis. *Analyse fonctionelle.* Masson